DİZİLER

$f: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ ye tanımlı f fonksiyonuna **reel sayı dizisi** denir.

Tanım kümesi : $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

(a_n) ifadesine genel terim ya da n. terim denir.

$(a_n) = (n^2+n+1)$ ise $a_1 = 3$
$a_2 = 7$
$a_3 = 13$
$\vdots$

1) $(a_n) = (n^2+3n-1)$ dizisinin ilk üç teriminin toplamı nedir?

$a_1 = 1+3-1 \Rightarrow a_1 = 3$

$a_2 = 4+6-1 \Rightarrow a_2 = 9$

$a_3 = 9+9-1 \Rightarrow a_3 = 17$

$a_1 + a_2 + a_3 = 3+9+17 = 29$

2) Genel terimi $a_n = 1+2+3+\ldots+n$ olan dizinin 10. ve 20. terimlerinin toplamı nedir?

$a_{10} = 1+2+3+\ldots+10 = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$

$a_{20} = 1+2+3+\ldots+20 = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210$

$a_{10} + a_{20} = 265$

3) Genel terimi

$$(a_n) = \begin{cases} 4n+1, & n \equiv 0 \pmod 3 \\ -n, & n \equiv 1 \pmod 3 \\ n^2-1, & n \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

olan dizi için $a_5 + a_6$ toplamı nedir?

$a_5 = 5^2 - 1 = 24$

$a_6 = 4 \cdot 6 + 1 = 25$

$\Rightarrow a_5 + a_6 = 24 + 25 = 49$

4) (a_n) ve (b_n) dizileri

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \equiv 0 \pmod 3 \\ n, & n \equiv 1 \pmod 3 \\ -n, & n \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ şeklinde tanımlanıyor. Buna göre b_4 nedir?

$b_4 = \sum_{k=0}^{4} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$= 0 + 1 + (-2) + 0 + (4)$

$= 3$

5) Aşağıda verilenlerden hangileri bir dizi belirtir?

- $\left(\frac{1}{n}\right)$ ✓
- $(\log n)$ ✓
- $(\sin(n+1))$ ✓
- $\left(\frac{3}{n+1}\right)$ ✓
- $\left(\frac{4}{n-3}\right)$ ☹
- $\left(\frac{1}{n^2-4}\right)$ ☹
- $\left(\frac{4}{7}\right)$ ✓
- $(\log_{n+2}(n-7))$ ☹
- $\left(\sqrt{\frac{n-1}{n+3}}\right)$ ✓
- $\left(\sqrt{\frac{n-5}{n}}\right)$ ☹
- $\left(\frac{2}{4n-15}\right)$ ✓
- $\left(\frac{1}{3n-21}\right)$ ☹

6) $\forall n \in N^+$ ve $n>1$ için

$a_n = a_{n-1} + 2n$ ve $a_1 = 5$ ise a_{10} nedir?

$a_n - a_{n-1} = 2n$

$n=2$ için $a_2 - a_1 = 4$

$n=3$ için $a_3 - a_2 = 6$

$n=4$ için $a_4 - a_3 = 8$

⋮

$n=10$ için $a_{10} - a_9 = 20$

+

$a_{10} - a_1 = 4+6+8+\dots+20$

$a_{10} - a_1 = 108 \Rightarrow a_{10} = 113$

($a_1 = 5$)

7) $\forall n \in N^+$ ve $n>1$ için $a_n = a_{n-1} + 3$ ve $a_1 = 3$ olan (a_n) dizisi için a_{40} nedir?

$a_n - a_{n-1} = 3$

$n=2$ için $a_2 - a_1 = 3$

$n=3$ için $a_3 - a_2 = 3$

$n=4$ için $a_4 - a_3 = 3$

⋮

$n=40$ için $a_{40} - a_{39} = 3$

+

$a_{40} - a_1 = \underbrace{3+3+\dots+3}_{39 \text{ tane}}$

$a_{40} - 3 = 117 \Rightarrow a_{40} = 120$

8) $a_1 = 1$, $a_n = \frac{1}{n} \cdot a_{n-1}$ ve $n \in N$, $n \geqslant 1$ olduğuna göre a_6 nedir?

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{n}$ ifadesinde $n=2$ için $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2}$

$n=3$ için $\frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{3}$

⋮

$n=6$ için $\frac{a_6}{a_5} = \frac{1}{6}$

x

$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \dots \frac{a_6}{a_5} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \dots \frac{1}{6}$

$\Rightarrow \frac{a_6}{a_1} = \frac{1}{6!} \Rightarrow a_6 = \frac{1}{6!}$

9) $\forall n \in N^+$ ve $n>1$ için

$a_n = \frac{n+3}{n+2} \cdot a_{n-1}$ ve $a_1 = 2$ olduğuna göre a_{21} nedir?

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+3}{n+2}$

$\Rightarrow \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \dots \frac{a_{21}}{a_{20}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} \dots \frac{24}{23}$

$\frac{a_{21}}{a_1} = 6 \Rightarrow a_{21} = 12$

10) Genel terimi $a_n = 5^n \cdot (n!)$ olan bir dizide a_n, a_{n-1} in kaç katıdır?

$a_{n-1} = 5^{n-1} \cdot (n-1)!$

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{5^n \cdot n!}{5^{n-1} \cdot (n-1)!} = \frac{5^n \cdot n \cdot (n-1)!}{\frac{5^n}{5} \cdot (n-1)!} = 5 \cdot n$

11) $\left(\frac{n^2+2n+9}{n+3}\right)$ dizisinin kaç tane terimi tam sayıdır?

$$\begin{array}{r|l} n^2+2n+9 & n+3 \\ -(n^2+3n) & n-1 \\ \hline -n+9 & \\ -(-n-3) & \\ \hline 12 & \end{array}$$

$\frac{n^2+2n+9}{n+3} = n-1 + \frac{12}{\boxed{n+3}} \rightarrow 1, 2, 3, 4, 6, 12$

$n+3 = 1 \Rightarrow n \neq -2$

$n+3 = 2 \Rightarrow n \neq -1$

$n+3 = 3 \Rightarrow n \neq 0$

$n+3 = 4 \Rightarrow n = 1$

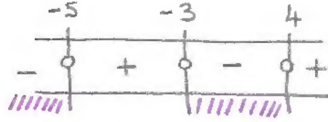
$n+3 = 6 \Rightarrow n = 3$

$n+3 = 12 \Rightarrow n = 9$

} 3 tanedir.

12) $(a_n) = \left(\frac{n^2-n-12}{n+5}\right)$ dizisinin kaç tane terimi negatiftir?

$\frac{n^2-n-12}{n+5} < 0$

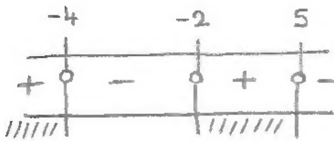


$\{1,2,3\}$

3 tane terimi negatiftir.

13) $(a_n) = \left(\frac{-n^2+n+20}{n+2}\right)$ dizisinin kaç terimi pozitiftir?

$\frac{-n^2+n+20}{n+2} > 0$



$\{1,2,3,4\}$

14) $(a_n) = (n^2-8n+10)$ dizisinin kaç terimi 3 ten küçüktür?

$n^2-8n+10 < 3$

$n^2-8n+7 < 0$

$n^2-8n+7 = 0$

$n \quad -7$

$n \quad -1$

$n = 1$

$n = 7$

$\{2,3,4,5,6\}$

5 tanedir.

• **Sabit dizi:** Bütün terimleri birbirine eşit olan dizidir.

$(a_n) = (k,k,k,\dots,k,\dots)$

☺ $(a_n) = \left(\frac{bn+c}{dn+e}\right)$ dizisi sabit dizi ise $\frac{b}{d} = \frac{c}{e}$ dir.

15) $(a_n) = \left(\frac{3n-k}{2n+3}\right)$ dizisi sabit dizi ise k ne olmalıdır?

$\frac{3}{2} = \frac{-k}{3} \Rightarrow k = -\frac{9}{2}$

• **Eşit dizi:**

$\forall n \in N^+$ için $(a_n) = (b_n)$ ise bu dizilere eşit dizi denir.

$a_1 = b_1$

$a_2 = b_2$

$a_3 = b_3$

$\vdots$

16) $(a_n) = \left(\frac{2n-3}{n+1}\right)$ ve $(b_n) = \left(\frac{4n-k}{2n+2}\right)$ dizilerinin eşit olması için k kaç olmalıdır?

$a_1 = b_1 \Rightarrow \frac{-1}{2} = \frac{4-k}{4}$

$-4 = 8-2k$

$2k = 12 \Rightarrow k = 6$

• **Alt diziler:** $\forall n \in N^+$ ve $k_n \in N^+$

$1 \le k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n < k_{n+1}$ olmak üzere (a_n) dizisinde n yerine k_n yazılarak elde edilen (a_{k_n}) dizisine (a_n) dizisinin alt dizisi adını veriyoruz.

17) Aşağıdaki dizilerden hangisi (a_n) dizisinin bir alt dizisi olamaz?

A) (a_{3n+1}) B) (a_{n^2}) C) (a_{7n-1})

•D) (a_{n-3}) E) (a_{n^2+3n+1})

• **Monoton diziler:**

$a_{n+1} - a_n > 0$ ise monoton artan

$a_{n+1} - a_n < 0$ ise monoton azalan

$a_{n+1} - a_n \leq 0$ ise monoton artmayan

$a_{n+1} - a_n \geq 0$ ise monoton azalmayandır.

☺ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere genel terimi $(a_n) = \left(\frac{a.n+b}{c.n+d}\right)$ olan dizide

• $-\frac{d}{c} > 1$ ise monoton değildir.

• $-\frac{d}{c} < 1$ ise monotondur ve

$a.d - b.c > 0$ ise monoton artan

$a.d - b.c < 0$ ise monoton azalandır.

18) $(a_n) = \left(\frac{3n+5}{5n+4}\right)$ dizisinin monotonluk durumu nasıldır?

$5n+4 = 0 \Rightarrow n = -\frac{4}{5} < 1$ olduğundan monoton

$3.4 - 5.5 = 12 - 25 = -13 < 0$ olduğundan monoton azalandır.

19) $(a_n) = \left(\frac{3n+k}{2n+5}\right)$ dizisi monoton artan olduğuna göre k nın en büyük tamsayı değeri kaçtır?

$3.5 - 2.k > 0$

$2k < 15$

$k < \frac{15}{2}$

$k < 7,5$

↓

en fazla 7 olur.

ARİTMETİK DİZİ

Ardışık terimleri arasındaki farkı sabit bir sayıya eşit olan dizilere **aritmetik diziler** denir.

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_n - a_{n-1} = r$

r : ortak fark

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

$a_2 = a_1 + r$

$a_4 = a_1 + 3r$

$a_9 = a_1 + 8r$

$$a_n = a_p + (n-p).r$$

$a_5 = a_2 + 3r$

$a_5 = a_3 + 2r$

$a_8 = a_5 + 3r$

$a_7 = a_3 + 4r$

$$a_n = \frac{a_{n-p} + a_{n+p}}{2}$$

$a_7 = \frac{a_5 + a_9}{2}$

$a_5 = \frac{a_1 + a_9}{2}$

İlk n terim toplamı S_n olmak üzere

$$S_n = \frac{n}{2}.\left[2a_1 + (n-1).r\right] \text{ dir.}$$

$S_{10} = 5.[2a_1 + 9.r]$

$S_{15} = \frac{15}{2}.[2a_1 + 14r]$

$S_{40} = 20.[2a_1 + 39r]$

$S_{11} = \frac{11}{2}.[2a_1 + 10.r]$

20) Bir aritmetik dizide

$a_2 = 7$

$a_5 = 22$ olduğuna göre a_{30} nedir?

$a_5 = a_2 + 3r \Rightarrow 22 = 7 + 3r$

$15 = 3r$

$r = 5$

$a_{30} = a_2 + 28r$

$= 7 + 28.5 = 7 + 140 \Rightarrow a_{30} = 147$

21) Bir aritmetik dizide

$a_1 = 5$

$a_5 = 45$ olduğuna göre a_{10} nedir?

$a_5 = a_1 + 4r$

$45 = 5 + 4r \Rightarrow 4r = 40$

$r = 10$

$a_{10} = a_1 + 9r$

$= 5 + 9.10$

$= 95$

22) Bir aritmetik dizide $a_8 - a_5 = 12$ olduğuna göre ortak fark nedir?

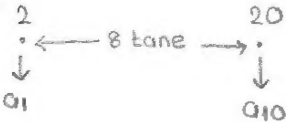
$a_8 - a_5 = 12.$

$(a_1 + 7r) - (a_1 + 4r) = 12$

$3r = 12$

$r = 4$

23) 2 ve 20 sayıları arasına aritmetik dizi oluşturacak şekilde 8 tane terim yerleştirilirse bu dizinin 6. terimi kaç olur?



$a_{10} = a_1 + 9r$

$20 = 2 + 9r \Rightarrow r = 2$

$a_6 = a_1 + 5r$

$= 2 + 5.2$

$= 12$

24) Bir aritmetik dizinin 7. terimi 4 ise 2. ve 12. terimlerinin toplamı nedir?

$a_7 = 4$

$a_7 = \frac{a_2 + a_{12}}{2} \Rightarrow a_2 + a_{12} = 8$

25) x, y, 15, z, t bir aritmetik dizinin ardışık terimleridir.

Buna göre x+y+z+t toplamı nedir?

$\frac{x+t}{2} = 15 \Rightarrow x + t = 30$

$\frac{y+z}{2} = 15 \Rightarrow y + z = 30$

$x + y + z + t = 60$

26) Ortak farkı 4, beşinci terimi 20 olan aritmetik dizinin ilk 7 teriminin toplamı nedir?

$a_5 = a_1 + 4r$

$20 = a_1 + 16 \Rightarrow a_1 = 4$

$S_7 = \frac{7}{2}.[2a_1 + 6.r] = \frac{7}{2}.[8 + 24] = \frac{7}{2}.32$

$= 7.16$

$= 112$

27) Bir aritmetik dizide $a_1 = -5$ ve $S_{20} - S_{10} = 240$ olduğuna göre S_{10} nedir?

$10.[2\underset{\substack{\downarrow\\-5}}{a_1} + 19r] - 5.[2\underset{\substack{\downarrow\\-5}}{a_1} + 9.r] = 240$

$-100 + 190r + 50 - 45r = 240$

$-50 + 145r = 240$

$145r = 290$

$r = \frac{290}{145} = 2$

$S_{10} = 5.[2a_1 + 9.r]$

$= 5.[-10 + 18] = 40$

28) Bir aritmetik dizide $S_{15} - S_7 = 120$ olduğuna göre S_{22} nedir?

$\frac{15}{2} \cdot [2a_1 + 14r] - \frac{7}{2} \cdot [2a_1 + 6r] = 120$

$15a_1 + 105r - 7a_1 - 21r = 120$

$8a_1 + 84r = 120$

$2a_1 + 21r = 30$

$S_{22} = 11 \cdot [2a_1 + 21 \cdot r]$

$= 11 \cdot 30 = 330$

29) Bir aritmetik dizide $a_1 = 10$ ve $a_7 + a_{12} = 190$ olduğuna göre a_{10} nedir?

$a_7 + a_{12} = 190 \Rightarrow a_1 + 6r + a_1 + 11r = 190$

$2\underset{\substack{\downarrow \\ 10}}{a_1} + 17r = 190$

$20 + 17r = 190$

$17r = 170 \Rightarrow r = 10$

$a_{10} = a_1 + 9r$

$= 10 + 90 = 100$

30) (a_n) bir aritmetik dizidir. $a_2 = 7$ ve $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 136$ olduğuna göre a_{12} nedir?

$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 136$

$a_2 + 3r + a_2 + 4r + a_2 + 5r + a_2 + 6r = 136$

$4\underset{\substack{\downarrow \\ 7}}{a_2} + 18r = 136$

$28 + 18r = 136$

$18r = 108$

$r = 6$

$a_{12} = a_2 + 10r$

$= 7 + 10 \cdot 6$

$\Rightarrow a_{12} = 67$

GEOMETRİK DİZİ

Ardışık iki terimin oranı aynı olan dizilere **geometrik dizi** adını veriyoruz.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

r : ortak çarpan (ya da ortak oran)

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$a_4 = a_1 \cdot r^3$

$a_7 = a_1 \cdot r^6$

$a_{10} = a_1 \cdot r^9$

$$a_n = a_p \cdot r^{n-p}$$

$a_4 = a_3 \cdot r^1$

$a_5 = a_2 \cdot r^3$

$a_{13} = a_9 \cdot r^4$

$$a_n^2 = a_{n-p} \cdot a_{n+p}$$ ya da $$a_n = \sqrt{a_{n-p} \cdot a_{n+p}}$$

$a_7^2 = a_4 \cdot a_{10}$

$a_{12}^2 = a_7 \cdot a_{17}$

$a_{12} = \sqrt{a_{10} \cdot a_{14}}$

$a_9 = \sqrt{a_3 \cdot a_{15}}$

• İlk n terim toplamı S_n olan bir geometrik dizide

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$$ dir.

$S_6 = a_1 \cdot \frac{1-r^6}{1-r}$

$S_{10} = a_1 \cdot \frac{1-r^{10}}{1-r}$

31) İlk terimi 3 ve ortak çarpanı 2 olan bir geometrik dizinin 5. terimi nedir?

$a_5 = a_1 . r^4$

$a_5 = 3.2^4 \Rightarrow a_5 = 48$

32) 2 ve 162 arasına uygun olan 3 tam sayı yerleştirilerek 5 sayıdan oluşan bir geometrik dizi oluşturuluyor.
Bu üç sayının toplamı nedir?

$2 \ldots 162$, $a_1 = 2$, $a_5 = 162$

$a_5 = a_1 . r^4 \Rightarrow 162 = 2.r^4$

$81 = r^4$

$r = 3$

$a_2 + a_3 + a_4 = a_1.r + a_1.r^2 + a_1.r^3$

$= 6 + 18 + 54$

$= 78$

33) Bir geometrik dizide $\frac{a_5}{a_8} = \frac{1}{27}$ ve $a_3 + a_5 = 270$ olduğuna göre a_1 nedir?

$\frac{a_5}{a_5.r^3} = \frac{1}{27} \Rightarrow r = 3$

$a_3 + a_5 = 270 \Rightarrow a_1.r^2 + a_1.r^4 = 270$

$9a_1 + 81a_1 = 270$

$90a_1 = 270$

$\Rightarrow a_1 = 3$

34) Bir geometrik dizide $a_9 = 32$ ve $a_{12} = 4$ olduğuna göre a_5'in değeri nedir?

$a_{12} = a_9.r^3$

$4 = 32.r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$

$a_9 = a_5.r^4 \Rightarrow 32 = a_5.\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$32 = \frac{a_5}{16} \Rightarrow a_5 = 512$

35) Bir geometrik dizinin ardışık üç terimi sırasıyla $x-2$, $x+1$, $x+5$ olduğuna göre x kaçtır?

$(x+1)^2 = (x-2).(x+5)$

$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 3x - 10$

$-x = -11$

$\Rightarrow x = 11$

36) $a, 5, b$ bir aritmetik dizinin ardışık ilk üç terimi, $a, 4, b$ bir geometrik dizinin ardışık ilk üç terimidir.
Buna göre $a^2 + b^2$ toplamı nedir?

$\frac{a+b}{2} = 5 \Rightarrow a + b = 10$

$a.b = 16$

$(a+b)^2 = 10^2 \Rightarrow a^2 + 2\underbrace{ab}_{16} + b^2 = 100$

$a^2 + 32 + b^2 = 100$

$a^2 + b^2 = 68$

37) Bir geometrik dizinin ilk 6 teriminin toplamının, ilk 3 teriminin toplamına oranı $2\sqrt{2}$ dir. Buna göre bu dizinin ortak çarpanı nedir?

$S_6 = 2\sqrt{2} . S_3$

$a_1.\frac{1-r^6}{1-r} = 2\sqrt{2}.a_1.\frac{1-r^3}{1-r} \Rightarrow 1 + r^3 = 2\sqrt{2}$

$r^3 = 2\sqrt{2} - 1$

$\Rightarrow r = \sqrt[3]{2\sqrt{2} - 1}$

38) Bir geometrik dizide $S_{10} = 33.S_5$ olduğuna göre r kaçtır?

$a_1.\frac{1-r^{10}}{1-r} = 33.\frac{1-r^5}{1-r}.a_1$

$(1-r^5).(1+r^5) = 33.(1-r^5)$

$1 + r^5 = 33$

$r^5 = 32$

$\Rightarrow r = 2$

☺ Bir dizi hem aritmetik hemde geometrik bir dizi ise **sabit dizi** dir.

$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$

39) $a+d, 2ad, ad^2$ dizisinin hem aritmetik hemde geometrik dizi olabilmesi için a nın alacağı değer kaç olmalıdır?

$a+d = 2ad = ad^2$

$2ad = ad^2 \Rightarrow d = 2$

$a+d = 2ad \Rightarrow a+2 = 4a$
$3a = 2$
$a = \frac{2}{3}$

40) $2a+3b-10, b+5, a+b-1$ dizisi hem aritmetik hemde geometrik bir dizi ise b nedir?

$2a+3b-10 = b+5 = a+b-1$

$\cancel{b}+5 = a+\cancel{b}-1 \Rightarrow a = 6$

$2a+3b-10 = b+5$ ($a \to 6$)

$2+3b = b+5 \Rightarrow 2b = 3 \Rightarrow b = 3/2$

SERİLER

(a_n) bir dizi olmak üzere

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+a_3+\dots+a_n+\dots$ toplamına

seri adını veriyoruz.

- $\sum_{k=p}^{\infty} r^k$ geometrik serisinde

$|r| < 1$ ise seri yakınsak

$|r| > 1$ ise seri ıraksaktır.

☺ $\sum_{k=p}^{\infty} r^k = \frac{a_1}{1-r}$ $\left(a_1 = r^p \text{ ve } |r| < 1\right)$

41) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ geometrik serisinin değeri nedir?

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots$

$a_1 = 1$
$r = \frac{2}{3}$

$\frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

42) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ toplamının sonucu nedir?

$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$

$\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$

43) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$ toplamının sonucu nedir?

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

44) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$ toplamının sonucu nedir?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot 2}{3^n \cdot \frac{1}{3}} = \sum_{n=1}^{\infty} 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$= 6 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$= 6 \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{1} = 12$

45) $1<y<3$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+y^n}{3^n}\right)$ toplamının sonucu nedir?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{y}{3}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{y}{3}}{1-\frac{y}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}+\frac{\frac{y}{3}}{\frac{3-y}{3}}$$

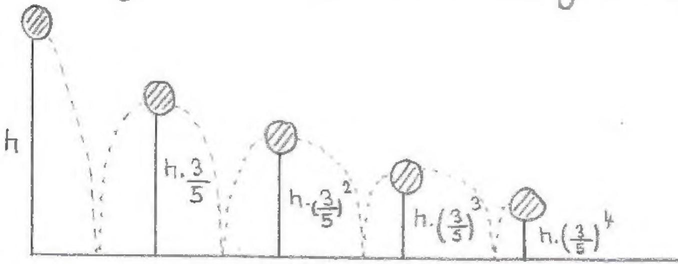
$$=\underset{(3-y)}{\frac{1}{2}}+\underset{(2)}{\frac{y}{3-y}}=\frac{3-y+2y}{6-2y}=\frac{3+y}{6-2y}$$

46) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{7^{n-1}}$ toplamının sonucu nedir?

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{7^n\cdot\frac{1}{7}}=7\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n$$

$$=7\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{7}}=7\cdot\frac{7}{5}=\frac{49}{5}$$

47) 16 metre yükseklikten serbest bırakılan bir top her defasında bir önceki düştüğü yüksekliğin $\frac{3}{5}$ ü kadar zıplıyor. Hareket bitinceye kadar top kaç metre yol alır?



Aldığı yol : $h+2h.\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\dots\right]$

$$\frac{a_1}{1-r}=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}}=\frac{3}{2}$$

$$=h+2h.\frac{3}{2}$$

$$=4h$$
↓
16

⇒ aldığı yol : 64m.

☺ h: topun ilk yüksekliği

a: yükselme oranı

olmak üzere topun alacağı yol : $h.\left(\frac{1+a}{1-a}\right)$ dır.

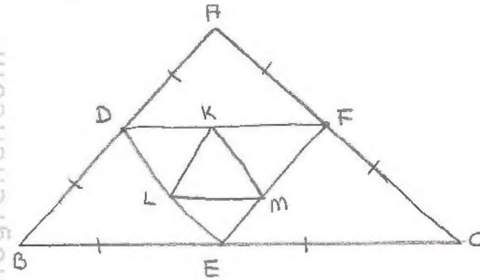
$h=16$ metre, $a=\frac{3}{5}$ } yol $=16.\frac{1+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}$

$$=16.\frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}}=16.4=64\text{ metre}$$

48) 24 metre yükseklikten serbest bırakılan bir top her defasında bir önceki düştüğü yüksekliğin $\frac{2}{5}$ si kadar zıplıyor. Hareket bitinceye kadar kaç metre yol alır?

$$24\cdot\frac{1+\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}=24\cdot\frac{\frac{7}{5}}{\frac{3}{5}}=24\cdot\frac{7}{3}=56\text{metre}$$

49) Bir kenarı 2 cm olan bir eşkenar üçgenin kenar orta noktaları birleştirilerek yeni bir üçgen oluşturuluyor. Bu işlem elde edilen her üçgene sonsuz defa uygulandığında oluşacak tüm üçgenlerin alanları toplamı kaç cm^2 dir?



$A(ABC)=S$

$A(DEF)=S.\frac{1}{4}$

$A(KLM)=S.\left(\frac{1}{4}\right)^2$

Tüm alanlar $=S.\left[1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\dots\right]=S.\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=S.\frac{4}{3}$

$S=\frac{2^2\sqrt{3}}{4}=\frac{4\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$

Tüm alan $=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

50) Yarıçapı 8 cm olan bir çemberin içine her birinin yarıçapı bir öncekinin yarısı olacak şekilde sonsuz çoklukta çemberler çiziliyor.

a) Çizilen tüm çemberlerin çevreleri toplamı nedir?

yarıçapı: r olsun

$r, r.\frac{1}{2}, r.(\frac{1}{2})^2, \ldots$

$2\pi r + 2\pi r.\frac{1}{2} + 2\pi r.(\frac{1}{2})^2 + \ldots = 2\pi r.(1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\ldots)$

$= 2\pi r.\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$

$= 4\pi r = 32\pi$ ($r = 8$)

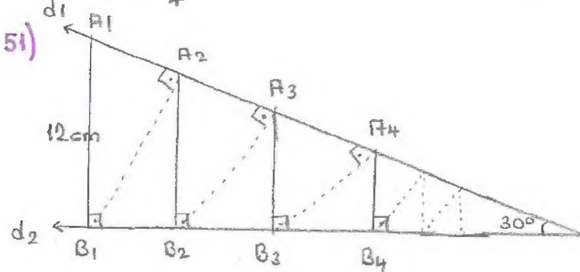
b) Çizilen tüm çemberlerin alanları toplamı nedir?

$\pi r^2 + \pi.r^2.\frac{1}{4} + \pi r^2.\frac{1}{16} + \pi r^2.\frac{1}{64}$

$= \pi r^2.(1+\frac{1}{4}+(\frac{1}{4})^2+(\frac{1}{4})^3+\ldots)$

$= \pi r^2.\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \pi r^2.\frac{4}{3} = \pi.64.\frac{4}{3} = \frac{256\pi}{3}$

51)

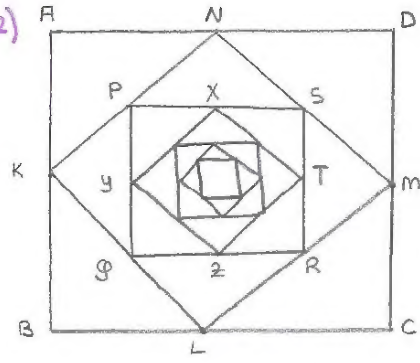


d_1 doğrusu üzerinde alınan A_1 noktasından d_2 doğrusuna A_1B_1 dikmesi iniliyor. Sonra B_1 noktasından d_1 doğrusuna B_1A_2 dikmesi ve A_2 dikme ayağından da d_2 doğrusuna A_2B_2 dikmesi iniliyor ve bu işlem sonsuz defa uygulandığında inilen tüm dikmelerin uzunlukları toplamı olan $|A_1B_1|+|A_2B_2|+|A_3B_3|+\ldots$ nedir?

$= h + h.\frac{3}{4} + h.(\frac{3}{4})^2 + \ldots = h.\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = h.\frac{4}{1} = 4.12$

$= 48$ cm

52)



Şekildeki ABCD dikdörtgenin boyutları 12 cm ve 16 cm dir. Bu dikdörtgenin kenarlarının orta noktalarını köşe kabul eden bir dörtgen ve bu dörtgenin kenar orta noktaları birleştirilerek bir dikdörtgen çiziliyor.

Bu işlem sonsuz defa uygulandığında oluşan tüm dörtgenlerin çevreleri toplamı nedir?

• Dikdörtgenlerin çevreleri toplamı

$56 + 56.\frac{1}{2} + 56.(\frac{1}{2})^2 + \ldots$

$= 56.\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 112$ cm

• Dörtgenlerin çevreleri toplamı

$40 + 40.\frac{1}{2} + 40.(\frac{1}{2})^2 + \ldots$

$= 40.\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 80$ cm

$112 + 80 = 192$ cm dir.